Vol.8, Num.2 Año 2013

Universidad de Puerto Rico. Recinto de Río Piedras http://paideia.uprrp.edu

---

Sentido numérico en las operaciones con fracciones: estrategias didácticas y factores

Julio Torres del Valle & Zahira M. Román Alicea

Resumen En este ensayo exploramos factores que se encuentran en la literatura asociados al desarrollo del sentido numérico. Presentamos estrategias didácticas utilizadas por distintos autores para ampliar en los estudiantes el sentido numérico asociado a las fracciones. Como factores importantes en el desarrollo del sentido numérico se destacan el lenguaje, valores de referencia y estimación, el uso de manipulativos y contexto real.

Palabras clave Estrategias didácticas, sentido numérico, fracciones, operaciones, contexto

Abstract In this essay we explore factors that are found in the literature associated with the development of number sense. We present instructional strategies used by different authors to expand number sense associated with fractions in students. As an important elements in the development of number sense we emphasize language, reference and estimate values, the use of manipulatives, and real context.

Keywords Didactic strategies, number sense, fractions, operations, context

Introducción

En este ensayo exploramos estrategias didácticas que puedan favorecer el desarrollo del sentido numérico, el entendimiento del número fraccionario y las operaciones con fracciones. Nos centramos en estrategias que puedan contribuir a mejorar el aprendizaje de las fracciones teniendo en cuenta el desarrollo del sentido numérico. Ahora bien, para ampliar el sentido numérico de los estudiantes en el aprendizaje del concepto fracción y de las operaciones con fracciones, nos preguntamos, ¿qué factores deben contener las estrategias didácticas para ser efectivas? Para responder a esta pregunta partimos de factores que se encuentran en la literatura asociados al desarrollo del sentido numérico, y con ellos identificamos estrategias didácticas que ayuden a mejorar el entendimiento del número fraccionario propiamente y el de las operaciones con fracciones.

De acuerdo con el "National Center for Education Statistics", en un examen suministrado en las escuelas públicas de Puerto Rico, se solicitó a estudiantes de octavo grado que expresaran la suma de tres números como un decimal (Ejemplo: $\frac{7}{10}, \frac{7}{100}$ y $\frac{7}{1000}$). Sólo un 7% de los estudiantes de octavo grado obtuvieron la respuesta correcta (National Assessment of Educational Progress, 2007, p. 11). La realidad presentada en esta evaluación nos lleva a cuestionarnos si las estrategias que hemos utilizado hasta el momento están funcionando o si debemos seleccionar y crear estrategias más adecuadas dirigidas a mejorar el entendimiento de las fracciones considerando el desarrollo del sentido numérico.

Sentido numérico

De acuerdo con Godino, Font, Konic & Wilhelmi (2009), la expresión "sentido numérico" es relativamente nueva en educación matemática y difícil de definir de manera precisa. Según los autores, se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y operaciones junto con la capacidad para usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos. En el libro Principios y Estándares para la Educación Matemática publicado por el NCTM en el año 2000, el centro del estándar de Numeración y Operación es precisamente el desarrollo del sentido numérico. Este libro plantea ciertos atributos que deben tener los estudiantes que poseen sentido numérico. En concreto, los estudiantes con sentido numérico descomponen los números de forma natural, usan números particulares a modo de referencias, resuelven problemas usando las relaciones entre las operaciones, comprenden el sistema decimal, estiman un resultado razonable para un problema, y tienen disposición para dar sentido a los números, a los problemas, y a los resultados. El Marco Curricular del Departamento de Educación de Puerto Rico (2003) también señala algunas características que debe poseer una persona con sentido numérico. En específico, una persona que ha desarrollado el sentido numérico puede relacionar un número con la cantidad o medida que representa, identifica relaciones entre conjuntos de números, reconoce diferentes representaciones de un mismo número, comprende el efecto de las operaciones sobre un número, reconoce la utilidad de los números en su entorno, y reconoce la razonabilidad de una respuesta numérica (p. 3).

Más allá de alcanzar una definición formal y precisa de sentido numérico, hemos mencionado cualidades o atributos de las personas que poseen sentido numérico. Aún así, nos interesan aquellas prácticas que puedan contribuir a desarrollar esas cualidades que poseen las personas con sentido numérico. Tsao & Lin (2011) citan el Libro "Interactions" de Hope & Small (1994) en el que estos presentan una lista de prácticas aplicables a niños de todas las edades. De acuerdo con ellos, los niños desarrollan sentido numérico en ambientes donde se siente estimulados a:

> trabajar con materiales concretos e ideas familiares, discutir y compartir sus hallazgos y soluciones, componer y recomponer diferentes representaciones de los números, investigar el uso razonable de los números en su mundo diario, explorar patrones y relaciones de los números, crear métodos alternativos de cálculo y estimación, resolver problemas de la realidad usando enfoques variados, realizar cálculos con algún propósito más allá de sólo obtener un resultado correcto, y recoger, organizar, demostrar e interpretar información cuantitativa (p. 3).

A la luz de las cualidades o atributos que debe tener una persona para poseer sentido numérico de acuerdo con los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y El Marco Curricular del Departamento de Educación de Puerto Rico (2003), y tomando como base las prácticas mencionadas por Tsao & Lin (2011), presentamos estrategias didácticas y factores que entendemos pueden contribuir al aprendizaje de las fracciones. Subrayamos las actividades que involucran situaciones en las que el estudiante puede hacer contacto con su entorno o ve vinculada su realidad con la matemática.

Como planteamiento inicial llamamos la atención sobre el uso del lenguaje. Este es un factor que incide en el aprendizaje de las fracciones porque su uso correcto afirma los significados que están implícitos. Friz, Sanhueza, Sánchez, Belmar & Figueroa (2008) señalan que "si bien este lenguaje ya posee un significado de forma internalizada, generalmente nuestros alumnos no logran hacer conscientes las implicaciones que estos enunciados tienen" (p. 88). Los autores mencionan como ejemplo, alguien que espera recibir la mitad de un sándwich, pero no está pensando en la relación que tiene la porción con el sándwich entero. Los estudiantes tienen contacto con la matemática diariamente, pero no siempre piensan de forma matemática ante las situaciones. En el ejemplo anterior, el estudiante tiene $\frac{1}{2}$ del sándwich o sea la mitad del sándwich completo, pero no llega a ver la relación de esta situación con una operación matemática. Nos parece que el uso del lenguaje correcto de las fracciones constituye un factor importante para desarrollar sentido numérico porque contiene información que refuerza la comprensión del concepto. Por ejemplo, cuando nos referimos a la fracción $\frac{1}{3}$, al mencionar un tercio el nombre de la fracción refuerza su significado, uno de tres. En cambio si nos referimos a la misma fracción como uno sobre tres, no se refuerza necesariamente su significado. La expresión un tercio esboza una composición de tres elementos de los cuales se toma uno. El lenguaje propio de las fracciones también refuerza el entendimiento de las operaciones. Por ejemplo, en la suma de $\frac{1}{8} + \frac{3}{8}$, al mencionar un octavo más tres octavos, reforzamos los significados, uno de ocho y tres de ocho. De esta manera la expresión de suma esboza la búsqueda del total 1 + 3 en la composición de ocho elementos de cada fracción. En fin, entendemos que el uso del lenguaje correcto al trabajar con fracciones hace consciente significados implícitos que facilitan la comprensión y el razonamiento.

Otro factor importante en el aprendizaje de las fracciones son las representaciones gráficas. Las representaciones gráficas pueden ser dibujos hechos o seleccionados previamente por el maestro o pueden ser trazados por el propio estudiante. May (1988) señala que para entender el significado del número fraccionario es importante que los estudiantes aprendan primero a construir en lugar de clasificar dibujos que han sido divididos previamente. Precisamente, esta es una de las prácticas mencionadas por Tsao & Lin (2011) para desarrollar sentido numérico que involucra la composición de la representación del número. Una actividad sugerida por May (1988) en su artículo "A sense of Fraction" que nos parece muy adecuada y realizable para crear modelos de fracciones utiliza tarjetas de fichero. La actividad consiste en facilitar a los estudiantes entre cuatro a seis tarjetas con un lápiz y una regla, para luego solicitarles que creen diferentes maneras de mostrar $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, y\ \frac{1}{8}$. La creación de modelos de fracciones vincula al estudiante con el significado de estas (p. 17). Esta actividad permite al estudiante construir su conocimiento componiendo el número fraccionario y así desarrolla el sentido numérico asociado.

Además de las representaciones gráficas, las fracciones suelen representarse mediante manipulativos. Dos maestros de tercer grado, Bray & Abreu (2010), realizaron un estudio donde utilizaron la comparación como estrategia principal para la enseñanza de fracciones. Ellos fomentaron en los estudiantes la construcción de imágenes mentales cimentadas en experiencias con manipulativos resaltando lo siguiente: utilizar el modelo de representación circular porque ofrece una sola forma del área para cada fracción dada; fomentar en los estudiantes el uso de valores de referencia, como $\frac{1}{2}$, e imágenes mentales en la resolución de problemas. Por ejemplo, "¿Qué fracción es mayor $\frac{14}{24}\ o\ \frac{17}{36}$?" (p. 91). Aquí se realiza una comparación con la fracción un medio, y a través de ese análisis se llega a la conclusión de que $\frac{14}{24}$ es mayor que $\frac{17}{36}$; Fomentar el intercambio de ideas en grupo, y discutir predicciones y hallazgos en clase; Realizar preguntas del tipo: ¿Cómo sabes qué fracción de la pizza se comió? Para los autores, es esencial conocer el proceso de cómo el estudiante resolvió el problema. Ellos encontraron que el énfasis en la comparación de fracciones a través del uso de imágenes mentales y estrategias de razonamiento aumenta en los estudiantes el sentido numérico relacionado con las fracciones (p. 97). Consideramos que de acuerdo con Tsao & Lin (2011) tanto el uso de valores de referencia para comparar fracciones así como fomentar en los estudiantes el intercambio de ideas, la discusión de predicciones y hallazgos, y realizar preguntas conducentes a los procesos de cómo el estudiante resuelve los problemas contribuye al desarrollo del sentido numérico. Nosotros resaltamos que Bray & Abreu (2010) añaden el componente de la construcción de imágenes mentales cimentadas en las experiencias con manipulativos y que reclaman que la comparación de fracciones una vez creadas estas imágenes aumenta el sentido numérico de los estudiante. Como ejemplo, si comparamos $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{3}$, tenemos una imagen mental de un semicírculo con una imagen mental de un tercio de círculo. En este caso el proceso mental cuenta con el mismo modelo de área para la representación de las fracciones y esto debe facilitar la comparación. Sin embargo, aunque nos parece que el modelo de manipulativo circular puede ser beneficioso en un momento dado, consideramos que más adelante las representaciones deben ampliarse a otros modelos de área no circulares con el propósito de flexibilizar las imágenes mentales asociadas a las fracciones.

Continuando con el uso de modelos manipulativos, en un artículo sobre construcción del "sentido de fracción", Naylor (2002) plantea que los manipulativos son una herramienta poderosa para construir pensamiento flexible. El autor utiliza objetos de la vida real de los estudiantes para desarrollar el concepto de fracción. Como ejemplo de una actividad en los grados K-2, el autor sugiere aprovechar el contexto de una tradición que se lleva a cabo en días festivos. Se trata de preparar papas horneadas con mantequilla. Con papel de construcción y tijeras se pueden simular las papas, y luego cortarlas y hacer preguntas a los estudiantes. Preguntar: ¿cuántas mitades se producen al cortar las papas en partes iguales?, ¿cuántas papas se pueden formar con seis mitades? Repitiendo esta actividad los estudiantes obtendrán sentido de las relaciones numéricas entre mitades y enteros (p. 30). Otra actividad sugerida por el autor para los grados 3-5 consiste en contar con fracciones usando manipulativos. Por ejemplo, contar piezas que representen tercios: un tercio, dos tercios, tres tercios, etc., luego detener el conteo en diferentes valores y preguntar, ¿cómo comparan sus piezas con un entero?, ¿cuántas piezas le faltan para llegar a un entero? Luego utilizar diferentes tamaños de fracciones para realizar comparaciones. Por ejemplo, ¿cuál es mayor entre cinco cuartos y cinco sextos?, ¿por qué? (p 30).

Para los grados 4-8, el autor propone dar a los estudiantes fracciones mixtas. Sugiere que los estudiantes usen los manipulativos para formar una fracción mixta con un sólo tipo de pieza. Por ejemplo, crear la fracción dos y dos tercios que es igual a ocho tercios, y repetir la actividad con otras fracciones mixtas. Luego dar a los estudiantes fracciones impropias tales como cinco mitades y siete tercios. Así los estudiantes tienen un modelo de la fracción impropia y mixta. El autor señala que este ejercicio no pretende enseñar a los estudiantes un algoritmo para convertir fracciones mixtas a impropias, sin embargo, refuerza los conceptos acerca de las fracciones. Además, se les facilitará a los estudiantes ser capaces de crear sus propias reglas para pensar sobre cómo combinar las fracciones para hacer enteros.

En las actividades anteriores, Naylor (2002) parte de una situación de la vida real y mediante preguntas alusivas a los manipulativos estimula a los niños a establecer la relación numérica entre mitades y enteros. Aquí se encuentran varios elementos que mencionan Tsao & Lin (2011) para el desarrollo del sentido numérico: trabajar con materiales concretos e ideas familiares, componer y recomponer diferentes representaciones de los números y explorar relaciones de los números. Entendemos que el uso de este tipo de manipulativo alusivo a la vida real de los estudiantes refuerza el aprendizaje de las fracciones. Además, les permite construir su conocimiento generando sus propios procesos de resolución de problemas desarrollando así sentido numérico.

Más adelante abordaremos las operaciones con fracciones y el desarrollo del sentido numérico. Ahora veremos un factor importante para el aprendizaje de las operaciones con fracciones. Es esencial que el estudiante tenga una comprensión del número fraccionario más allá de ver dos números enteros escritos uno sobre el otro. "Uno de los problemas principales que tienen los estudiantes es que se les requiere realizar cómputos con fracciones antes de que tengan un entendimiento real del significado de fracción." (May, 1998). Para lograr el entendimiento de la fracción, Dunham (2008) sugiere partir de la propia fracción. Según él "Los niños desarrollan un sentido de fracción a través de la fracción misma" (p. 1). Por lo tanto, consideramos importante dar énfasis a la relación que tiene el numerador con el denominador. Dunham advierte lo siguiente: "Si los niños fallan en establecer el entendimiento básico de la fracción, ello consistentemente revierte a las estrategias de los números enteros, considerando el numerador y el denominador como valores no relacionados." (p. 2). Al considerar la fracción de esta manera el estudiante no la concibe como una sola entidad sino que la visualiza como dos números independientes. En consecuencia, el niño puede desarrollar conceptos equivocados y cometer errores más adelante en las operaciones. Por ejemplo, el niño podría pensar que no hay números entre 0 y 1 o que un procedimiento correcto de suma de fracciones es sumar los numeradores y los denominadores ($\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$) (Phipps, 2008, p. 15). Estamos convencidos de que un niño que haya desarrollado un nivel razonable de sentido numérico asociado a las fracciones podrá entender que existen números entre 0 y 1, y mencionar ejemplos tales como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, entre otros. Para lograr ese nivel de sentido numérico es imprescindible la comprensión del número fraccionario como una sola unidad aunque esté compuesto de dos números superpuestos. De igual modo, con esa comprensión el niño podrá percatarse de que $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$ es incorrecto desde la perspectiva de las fracciones como partes de un todo.

Operaciones con Fracciones

Cuando un estudiante lleva a cabo una operación con fracciones y obtiene un resultado correcto, cabe preguntarse si la forma en que obtuvo el resultado implica un nivel razonable de sentido numérico. En esa dirección, Reys & Yang (1998) llevaron a cabo un estudio en Taiwán con niños de sexto y octavo grado para determinar si existe relación entre desempeño computacional y el sentido numérico. Los autores utilizaron dos tipos de pruebas comparables, una que determinó el sentido numérico, y otra que examinó el cálculo escrito. Como resultado del desempeño de los estudiantes se encontró lo siguiente: "más del 60% de los estudiantes de octavo grado calcularon $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$ correctamente, sin embargo, sólo un 38% de ellos logró una estimación aceptable de 2 para la suma en la prueba comparable de sentido numérico; y más de la mitad respondió con un estimado de 19, 21 o No sé." (p. 231). Tanto este estudio como otros realizados en diferentes países sostienen que no hay una relación directa entre tener sentido numérico y realizar cómputos (Reys & Yang, 1998; Tsao & Lin, 2011). Esto implica que el estudiante puede tener una destreza para efectuar un cómputo, y tener un sentido numérico deficiente o viceversa (Phipps, 2008, p. 4). Partiendo de este resultado, nos cuestionamos la efectividad de una enseñanza dirigida a efectuar cómputos basada principalmente en procesos algorítmicos. En el ejercicio de suma de fracciones de la prueba comparable anterior, una estrategia que podría abonar a obtener un resultado que implique sentido numérico sin utilizar necesariamente un algoritmo es utilizar valores de referencia. En este caso, se determina que cada fracción se aproxima a 1 y una estimación razonable para la suma sería 2.

En la tesis "Fraction Proficiency in gifted middle school students" de Lauren A. Lejeune presenta lecciones para la enseñanza de fracciones. En el estudio de cada una de las operaciones se promueve el uso del contexto real, dibujos hechos por los estudiantes y discusión grupal. En una lección sobre el concepto fracción la maestra comienza el tema escribiendo una fracción en la pizarra y luego le pide a los estudiantes que hagan una descripción con un dibujo. Después de crear una discusión con los estudiantes, la maestra procede a definir el término fracción (p.18-20). En otra lección sobre suma de fracciones con denominadores iguales, la maestra presenta a los estudiantes una situación: Sara caminó $\frac{3}{7}$ de milla el lunes y $\frac{2}{7}$ de milla el martes. ¿Cuántas millas Sara caminó? Los estudiantes deben trazar un dibujo para ilustrar los hallazgos y luego discutirlos en grupo. Después, la maestra solicita a los estudiantes trazar sus dibujos en la pizarra. El primer estudiante dibujó una recta numérica que incluyó los números del 1al 10. Comenzando en el número 3, se movió dos espacios hasta llegar al número 5. Otro estudiante dibujó un rectángulo dividido en 7 partes y sombreo tres partes para representar $\frac{3}{7}$ y después dos más para representar $\frac{2}{7}$. Ambos llegan a la conclusión de que Sara caminó $\frac{5}{7}$ millas (p. 20-21).

En la lección de suma de fracciones con denominadores diferentes, la maestra presenta la siguiente situación: Peter se comió $\frac{2}{3}$ de un bizcocho. Su amigo David se comió $\frac{1}{6}$ del mismo bizcocho. ¿Cuánto bizcocho se comieron entre los dos? Ilustra tus hallazgos. Los estudiantes trabajan individualmente y luego comparten los resultados con el grupo. Una estudiante dibujó un círculo dividido en tres partes. Luego, sombreó dos de las tres partes del círculo. Después dibujó otro círculo con seis partes y sombreó una de las partes. Finalmente dibujó un tercer círculo con 6 partes y 5 partes sombreadas. Ella explicó que el primer dibujo representa $\frac{2}{3}$, el segundo dibujo representa $\frac{1}{6}$, y el tercer dibujo representa la suma de $\frac{2}{3}\ y\ \frac{1}{6}$. La maestra le preguntó por qué partió el tercer círculo en seis partes y ella explicó que $\frac{1}{3}$ es lo mismo que $\frac{2}{6}$ y además necesitaba sumar $\frac{1}{6}$ a esa cantidad por lo que seis partes tiene más sentido. Otra estudiante dibujó dos rectángulos de igual tamaño colocados uno sobre el otro. Ella dividió el primer rectángulo en tres secciones y el segundo rectángulo en seis secciones. Luego, sombreó dos secciones del primer rectángulo y dijo que la región sombreada representaba $\frac{2}{3}$. Después sombreó una sección del segundo rectángulo y dijo que esta región representaba $\frac{1}{6}$. Ella explicó que dos secciones del segundo rectángulo hacían una sección del primer rectángulo. Dibujó un tercer rectángulo de igual tamaño dividido en seis secciones. Finalmente explicó que cuatro secciones representan $\frac{2}{3}$ y una sección representa $\frac{1}{6}$, y cuando las sumas obtienes $\frac{5}{6}$ (p. 22-23). Aquí se evidencia que los estudiantes pueden crear sus métodos alternativos de cálculo cuando se les permite trabajar con libertad en la solución de problemas.

En cuanto a la multiplicación de fracciones, la maestra presenta en la pizarra la siguiente situación: Noah tiene 20 dólares y fue a una librería donde gastó $\frac{2}{5}$ de su dinero en un libro ¿Cuánto costó el libro? Un estudiante dibujó 20 rectángulos y los dividió en grupos de 5, circuló dos de los grupos y luego escribió el número 8 en la pizarra. La maestra le preguntó, qué operación realizó, y él le contesto, división porque la respuesta es menor que 20. El investigador encuentra que los estudiantes pueden resolver los ejercicios correctamente, sin embargo, no pueden determinar que la operación llevada a cabo es multiplicación (p.28-29). No obstante, nosotros advertimos que aquí el estudiante creó un proceso alterno al algoritmo para resolver el problema, es decir desarrolló una estrategia útil para resolver el problema. Este caso ejemplifica que el niño posee sentido numérico de acuerdo con la definición de Godino et al. (2009).

En resumen, todas las lecciones presentan situaciones de la vida real de los estudiantes y solicitan crear representaciones propias mediante dibujos. Además hacen hincapié en la discusión grupal de manera que los niños tienen la oportunidad de ofrecer sus propias explicaciones. Específicamente, en la lección del concepto fracción, la maestra llega a una definición después de una discusión grupal. En las lecciones de suma de fracciones, los estudiantes crean sus propios métodos de cálculo y llegan a los mismos resultados utilizando dibujos diferentes. Además, al compartir los resultados visualizan representaciones diferentes para un mismo problema. En particular, consideramos que compartir representaciones distintas con sus respectivas explicaciones propende a crear imágenes mentales diferentes y esto permite flexibilizar el pensamiento en el dominio de las fracciones. Además entendemos que las prácticas en las lecciones anteriores están dirigidas al desarrollo del sentido numérico porque los niños trabajan con materiales concretos e ideas familiares, discuten y comparten hallazgos y soluciones, compone diferentes representaciones de los números y crean métodos alternos de cálculo para resolver problemas de la realidad. Por otra parte, la discusión grupal ayuda al fortalecimiento de las respuestas y además sirve como instrumento de medición de conocimiento, puesto que puede dejarle saber al maestro cuánto saben los estudiantes sobre las fracciones y así enfocarse en las debilidades que los estudiantes pudieran tener en ese tema.

En un estudio sobre multiplicación de fracciones, Wu (2001) examinó cómo llevar a cabo la extensión de la multiplicación de los números enteros a las fracciones de forma significativa. El autor utiliza situaciones de la vida real para explorar el significado de la multiplicación y representaciones pictóricas para razonar sobre situaciones, descubrir patrones, y buscar maneras de validar un pensamiento. Wu (2001) señala que los niños que sólo conocen reglas tienen una habilidad limitada para generalizar la información a otras situaciones, especialmente cuando enfrentan problemas complejos (p. 1). Además, destaca dos puntos en el desarrollo del significado de la multiplicación con números fraccionarios. Primero, se debe partir de la experiencia con problemas verdaderos, y segundo, se debe permitir a los estudiantes explorar situaciones y hacer conjeturas. Entendemos que los elementos que el autor destaca en el desarrollo del significado de la multiplicación con números fraccionarios se ajustan a los descritos en la literatura para el desarrollo del sentido numérico. De igual modo, advertimos que limitar el aprendizaje de operaciones con fracciones a la aplicación de reglas no aumenta el desarrollo del sentido numérico.

Ampliando con relación a la memorización de reglas y el sentido numérico, en Tsao & Lin (2011) llevaron a cabo un estudio para investigar qué conocimientos tenían los maestros del nivel elemental en Taiwán sobre sentido numérico y cómo lo desarrollaban en los estudiantes. Ellos encontraron que en la enseñanza de las cuatro operaciones básicas con fracciones, dos maestros tenían la tendencia de solicitar a los estudiantes que repitieran y memorizaran (p.12). Por ejemplo, al resolver: $4\frac{1}{2} - 1\frac{3}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9}{2} - \frac{11}{8} - \frac{9}{4} \ldots$ El maestro describe: “El cálculo está bueno. Primero que todo, tienes que transformar todas las fracciones en fracciones impropias… Recuerda utilizar resta continua, ¿De qué parte hasta que parte?” Los estudiantes levantan la mano inmediatamente y contestan: “de izquierda a derecha” (p.10). Aunque un enfoque de memorización puede ser útil para alcanzar respuestas correctas, entendemos que apoyarse exclusivamente en la memorización de un proceso puede comprometer el desarrollo del sentido numérico porque se limita el razonamiento en términos de restringir la resolución de un problema a una sola forma.

En la misma dirección, en un estudio sobre la flexibilidad y durabilidad del conocimiento que adquieren los estudiantes cuando estudian fracciones, especialmente con la operación de división, Bulgar, Schorr & Warner (2004) argumentan que la falta de “sentido” al llevar a cabo algoritmos sin hacer conexiones con otros tipos de representaciones contribuye a la incapacidad de los estudiantes en su utilización para resolver nuevos problemas. Estos investigadores se enfocaron en cómo un grupo de niños ampliaron, modificaron, revisaron, y generalizaron sus ideas relativas a la división de fracciones a través del quinto y sexto grado. Como estrategia didáctica durante el estudio, fomentaron en los estudiantes explicar sus soluciones, compartir y discutir sus pensamientos, y presentar sus ideas por escrito. No les enseñaron algoritmos, sin embargo, cuando los estudiantes reconocían patrones y podían justificarlos como válidos, crearon generalizaciones (Bulgar, Schorr & Warner 2004, p. 3). Los autores señalan que utilizaron las preguntas durante las clases para obtener explicaciones, guiar a los estudiantes hacia justificaciones convincentes de sus soluciones y reorientarlos cuando tenían razonamientos incorrectos. Ellos concluyen que los estudiantes fueron capaces de recuperar las ideas que habían construido sobre la división de fracciones durante el año escolar anterior, y estas ideas se utilizaron y extendieron apropiadamente. Nosotros entendemos que una vez el estudiante desarrolla sentido numérico está en mejor posición para hacer generalizaciones que lo lleven a crear procesos con sentido para él. Además, estará mejor preparado para resolver problemas en general. Aunque los algoritmos utilizados de forma generalizada pueden facilitar ciertos cómputos en situaciones determinadas, es necesario que el estudiante efectué conexiones con otros tipos de representaciones para flexibilizar sus conocimientos y aumentar su sentido numérico. Por otra parte, reconocemos que las estrategias empleadas por los investigadores tales como fomentar el compartir y discutir las ideas de los estudiantes particularmente cuando descubren patrones contribuyen al desarrollo del sentido numérico.

Acerca de las operaciones con fracciones, Noura (2009) señala que los estudiantes necesitan apoyo en el perfeccionamiento y ampliación de sus interconexiones (p. 168). El autor sugiere, por ejemplo, que el maestro puede iniciar una lección con el siguiente problema: Cuatro estudiantes necesitan compartir tres barras de chocolate en partes iguales. ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada estudiante? Esta pregunta puede producir una variedad de soluciones fraccionarias y crea un buen ambiente para presentar y discutir conceptos como fracciones equivalentes, comparación de fracciones y operaciones con fracciones (p. 168). Con el propósito de desarrollar sentido numérico, resaltamos las conexiones con el mundo real de modo que el estudiante encuentre pertinencia en el uso de las operaciones con fracciones.

Un factor importante sobre las operaciones con fracciones es un concepto erróneo relacionado con la multiplicación y la división. Con frecuencia los estudiantes creen que la multiplicación produce números más grande y la división números más pequeños. De experiencias anteriores, los estudiantes saben que la multiplicación es una suma repetida: $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ y $2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, pero es difícil para ellos traducir y visualizar: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ utilizando la misma estrategia. Los estudiantes necesitan aprender estrategias diferentes tales como las presentadas en las siguientes figuras:

Figura 1 ½

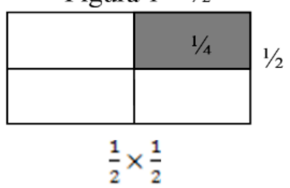
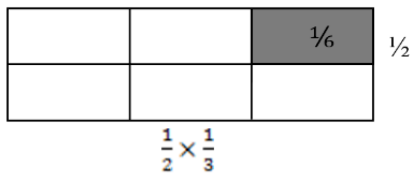


Figura 2 ⅓



Las celdas sombreadas representan áreas de rectángulos. Esta estrategia ayuda a los estudiantes a entender que la multiplicación puede producir números más pequeños. Sin embargo, los estudiantes deben estar familiarizados con el uso de modelos de área para interpretar la multiplicación de números enteros antes de utilizar el modelo (p. 169). El área de un rectángulo es el producto de la base y la altura y el uso de una figura como puede ser un rectángulo ayuda al estudiante a visualizar la multiplicación de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ (Figura 2). En cambio, en ausencia de una figura, la expresión numérica de multiplicación pudiera no tener sentido para algunos estudiantes.

De acuerdo con Noura (2009), los estudiantes necesitan entender el concepto de dividir fracciones antes de aprender a usar un método mecánico. Se puede utilizar la medición y partes con áreas para interpretar la división de fracciones, y así los estudiantes pueden ser capaces de analizar los resultados y crear algoritmos formales. Las siguientes preguntas pueden ser útiles:

1. ¿Cuántas mitades hay en una mitad? La contestación es una mitad. ($\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$).

2. ¿Cuántos cuartos hay en un entero? La contestación es cuatro cuartos. ($1 \div \frac{1}{4} = 4$).

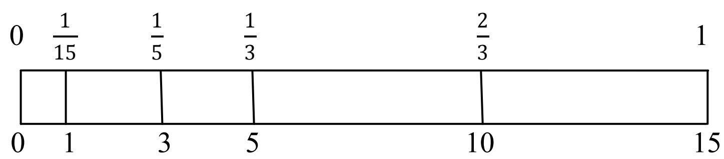
3. Un médico indica tomar la mitad de una tableta una vez al día hasta acabar el paquete. ¿Cuántos días hay que tomar el medicamento si el paquete contiene seis tabletas? La contestación es 12 días. ($6 \div \frac{1}{2} = 12$).

Para la división de fracciones una posible estrategia es emplear el uso de dinero. Así hacemos una conexión pertinente con la vida real de los estudiantes. Por ejemplo: Si tenemos $1 \div \frac{1}{4} = 4$, un planteamiento para el estudiante puede ser el siguiente: ¿Qué fracción es una peseta de un dólar? ($\frac{1}{4}$ de dólar). ¿Cuántas pesetas hay en un dólar? Dividimos un dólar entre $\frac{1}{4}$ de dólar (4). Así la expresión ($1 \div \frac{1}{4} = 4$) cobra más sentido.

Figura 3

En un artículo sobre los principios generales de las matemáticas en contexto, López & Quintero presentan el modelo de rectas numéricas dobles. De acuerdo con los autores, se trata de un modelo interesante que tiene múltiples aplicaciones en el desarrollo de importantes nociones matemáticas. Entre sus aplicaciones se encuentra vincular las operaciones con fracciones a las operaciones con números enteros. En la siguiente figura, se presenta una recta doble que muestra como representar fracciones.

Figura 4



(p. 9)

Generalmente, una recta doble de fracciones consiste de una regla calibrada con enteros en un lado y con fracciones en el otro. Se utilizan números enteros que permitan representar las fracciones de interés. En el ejemplo de la figura, la regla de abajo está calibrada del 1 al 15, y arriba las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{15}$ corresponden respectivamente con los enteros 5, 3 y 1. Todas las fracciones se pueden expresar en quinceavos: $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$, $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$, etc. Al restar $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ en la recta superior, la operación corresponde con la resta 5-3 = 2 en la recta inferior. Por consiguiente, en la recta superior el resultado de la resta se lee como $\frac{2}{15}$. De igual forma $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ corresponde en la recta inferior a 3+ 5 = 8. Así, $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ corresponde a 8 unidades de la recta superior, es decir, a $\frac{8}{15}$. También la recta doble sirve para ilustrar la multiplicación y la división de fracciones. Por ejemplo, la quinta parte de $\frac{2}{3}$, es decir $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$, en la recta inferior corresponde a la quinta parte de 10, es decir, 2. Interpretando el resultado en la recta superior, tenemos $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$. En cuanto a la división, cocientes correspondientes son iguales, por ejemplo, $\frac{1}{3} \div \frac{1}{15} = 5$ puesto que en la recta inferior el cociente correspondiente es $5 \div 1 = 5$ (p. 10).

Como hemos visto, el empleo de las rectas dobles con números enteros y fracciones permiten al estudiante establecer relaciones numéricas que simplifican la resolución de las operaciones. Además, constituyen un modelo poderoso para simplificar problemas, descubrir relaciones interesantes y ampliar el sentido numérico.

Conclusión

El desarrollo del sentido numérico es el centro del estándar de Numeración y Operación del libro Principios y Estándares para la Educación Matemática publicado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en el año 2000. Sin embargo, el NCTM en su libro de Principios y Estándares y el Departamento de Educación de Puerto

Rico, en su Marco Curricular (2003) no presentan una definición de sentido numérico. Sólo describen las cualidades o atributos que poseen las personas con sentido numérico. Godino et al. (2009) señalan que la expresión sentido numérico es relativamente nueva en educación matemática y difícil de definir de manera precisa. Nosotros planteamos que el sentido numérico es fundamental para la comprensión del número fraccionario y para el dominio de las operaciones con fracciones.

Las estrategias didácticas para la enseñanza de las fracciones deben atender el desarrollo del sentido numérico. En este sentido, partiendo del análisis de la literatura consultada consideramos que las estrategias didácticas que utilizan los maestros deben incluir los siguientes factores: usar el lenguaje propio de las fracciones para resaltar su significado implícito, fomentar en los estudiantes la construcción de sus propias representaciones, fomentar la construcción de imágenes mentales cimentadas en experiencias con manipulativos, construir y manejar manipulativos alusivos a la vida real de los estudiantes, hacer énfasis en la comprensión del número fraccionario más allá de ver dos números enteros escritos uno sobre el otro, hacer hincapié en la discusión grupal y compartir dibujos, resultados y explicaciones, utilizar valores de referencia para la estimación o aproximación en las operaciones, desarrollar problemas partiendo de un contexto real, fomentar la reflexión y el análisis individual de los resultados, realizar preguntas orientadas a tomar consciencia del sentido de los procesos, reconocer patrones y justificar su validez. Nos parece especialmente importante que el estudiante no descanse en la simple memorización de algún proceso o algoritmo sin tener comprensión de los elementos subyacentes que dan sentido al mismo. Antes de presentar algún proceso o algoritmo el estudiante debe tener la oportunidad de construir sus propios procesos.

También es importante presentar al estudiante modelos que contribuyan a la comprensión de las fracciones y que sirvan de herramientas para resolver problemas. Un modelo muy cotidiano y pertinente es el dinero. El conocimiento que tiene el estudiante sobre el dinero es un recurso valioso para hacer conexiones con el concepto fracción y sus operaciones. En el caso de los modelos de área resaltamos la representación del producto de dos fracciones mediante rectángulos subdivididos en partes iguales rectangulares. Este modelo permite visualizar que el producto de dos fracciones puede ser más pequeño que cada factor. Finalmente, mencionamos el modelo de rectas dobles porque nos parece muy útil para entender y resolver problemas que involucran fracciones. Este modelo permite al estudiante conectar sus conocimientos de los enteros con las fracciones mediante las proporciones implícitas en su diseño. Así las dificultades en la transición de los enteros a las fracciones que con frecuencia experimentan los estudiantes pueden ser superadas.

Referencias

Anderson, C., Anderson, K. & Wenzel, E. (2000). Oil and Water Don't Mix, but They Do Teach Fractions. *Teaching Children Mathematics*, *7*(3), 174. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/214137422?accountid=44825

Bray, W. & Abreu, L (2010). Using Number sense to compare fractions. *Teaching Children Mathematics*, *17*(2), 90-97. Recuperado de http://www.loudoun.k12.va.us//site/Default.aspx?PageType=6&SiteID=1&SearchString=using number sense to compare fractions.

Bulgar, S., Schorr, R. Y., & Warner, L. B. (2004). Flexibility in Solving Problems Related to Division of Fractions. *Conference Papers -- Psychology Of Mathematics & Education Of North America*, 1.

Departamento de Educación de Puerto Rico. (2003). *Marco Curricular del Programa de Matemáticas* (2003). San Juan, P.R.: Publicaciones Puertorriqueñas, Inc.

Dunham, J. M. (2008). *Comparing fractions: The impact of three instructional strategies on procedural and conceptual knowledge development.* Union Institute and University. *ProQuest Dissertations and Theses,* 177-n/a. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/304820920?accountid=44825. (304820920).

Fandiño, M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*. 7, 23-45.

Friz, M., Sanhueza, S., Sánchez, A., Belmar, M. & Figueroa, E. (2008). Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones. *Horizontes Educacionales,* 13(2) ,87-98. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=97912401006

Godino, J., Font, V., Konic, P., & Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. *Investigación en el* *aula de matemáticas Sentido Numérico,* 117- 184. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sentido_numerico.pdf

Goul, H. (2011). Building understanding of fractions with Lego bricks. *Teaching children mathematics*, 17(8), 498-503.

Lejeune, L. (2011). *Fraction Proficiency in gifted middle school students.* Louisiana State University. *Dissertations and Theses,* 86. Recuperado de http://etd.lsu.edu/docs/available/etd-07062011-133533/

Lin, Y. & Tsao, Y. (2011). The study of number sense and teaching practice. *Journal of Case Studies in Education*, 2, 1-14. Recuperado de http://www.aabri.com/manuscripts/11750.pdf

López, J. & Quintero, A. (s.f.) Los principios generales de la enseñanza y del aprendizaje. Recuperado de https://www.box.com/s/gs9uijaka32lvi15fz3l

May, L. (1998). A sense of fractions. *Teaching Pre K-8*, *28*(6), 17. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/231915405?accountid=44825

Moore, R. C. (1994). Teaching number sense in the elementary school. *Journal of Adventist Education*, *56*(3), 12-17.

Naiser, E., Wright, W. & Capraro, R. (2004). Teaching Fractions: Strategies used for teaching fractions to middle grade students. *Journal of Research Childhood Education,* 18(3), 193-198.

National Assessment of Educational Progress. (2007). *Results, Puerto Rico, 2007, Mathematics, Commissioner's Report, Executive Summary.* Recuperado de http://nces.ed.gov/nationsreportcard/pubs/studies/2009451.asp

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Naylor, M. (2002). Building fraction sense. *Teaching Pre K - 8, 33*(3), 30-32. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/231925605?accountid=35812

Noura, K. (2009). *Understanding fractions: what happens between kindergarden and the army?* Trabajo presentado en la Conferencia MAV 2009 de Matemática en la Universidad La Trobe Bundoora, Australia. Recuperado de http://www.mav.vic.edu.au/component/content/article/23-professional-learning-activities/336-mav-annual-conference-2009.html

Number sense-making. (1994). *The Arithmetic Teacher, 41*(6), 342-342. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/208769417?accountid=35812

Phipps, M. C. (2008). *A phenomenological investigation on eighth graders' number sense of fractions.* University of Northern Colorado. *ProQuest Dissertations and Theses,* 312. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/304539800?accountid=44825. (304539800)

Ploger, D. & Rooney, M. (2005). Teaching fractions: Rules and reason. Teaching Children Mathematics, *12*(1), 12-17. Recuperado de http://www.math.ccsu.edu/mitchell/math409tcmteachingfractionsrulesandreasons.pdf

Reys, R. E. & Yang, D.C. (1998).Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal of Research in Mathematics Education*, *29*, 39-58.

Wu, Z. (2001). Multiplying fractions. *Teaching Children Mathematics, 8*(3), 174-177. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/214138892?accountid=35812

Yea-Ling Tsao, & Yi-Chung Lin (2011). The study of number sense and teaching practice. *Journal of Case Studies in Education*, *2*, 1-14. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/887907244?accountid=44825

Julio Torres del Valle es maestro de matemáticas en el Departamento de Educación de Puerto Rico, en la Escuela Manuela Toro Morice, en Caguas. Ha sido profesor conferenciante en el Departamento de Ciencias y Tecnologías de la Universidad del Turabo y en la Universidad Metropolitana (UMET), en propuestas de certificación de maestros de matemáticas a nivel secundario. Tiene un bachillerato en educación secundaria en matemáticas de la Universidad de Puerto Rico, en Cayey, una maestría en currículo y enseñanza en matemáticas de Phoenix University. Actualmente estudia un doctorado en currículo y enseñanza en Matemáticas en la Universidad de Puerto Rico, Río Piedras.

Zahira M. Román Alicea ingreso en la Facultad de Administración de Empresas de la Universidad de Puerto Rico, en el 2002, donde completó un bachillerato en Contabilidad, graduándose Magna Cum Laude. Durante sus estudios en la Universidad de Puerto Rico fue miembro de la Asociación de estudiantes de Contabilidad. Comenzó a trabajar en el 2006, en la compañía Medical Card System, mejor conocida como "MCS", donde laboro como asistente de contabilidad hasta lograr la posición de Analista Financiero en la división de Finanzas corporativas. Trabajó en la compañía Ibope Media como contable y actualmente trabaja como asistente del Proyecto Caimap K-3 en la Universidad de Puerto Rico Recinto de Rio Piedras, mientras cursa estudios graduados en la Facultad de Educación para completar una maestría en Currículo y Enseñanza en Matemáticas.